

Dev n° 15

Ref: Rouvière "Petit guide de
 CAPES différentiel à l'usage
 de la licence et de l'agrégation"
 Site: Louis D

Attention erreur calcul du grad rouvière en fonction
 de la version

Titre: Point de Fermat d'un triangle

O origine de $\mathbb{R}^2$. $\|\cdot\|$ norme euclidienne

Prop:

Soient A, B, C trois points non alignés dans $\mathbb{R}^2$.

On suppose les trois ^{mesures} d'angles du triangle ABC strictement inférieurs à $2\pi/3$.

On cherche le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction

$$F(M) = AM + BM + CM$$

$$\text{ou } MA = \|\vec{MA}\|.$$

Alors, le minimum de F est atteint en un unique point P intérieur strict au triangle ABC.

De plus, les angles $\hat{APB}$, $\hat{BPC}$ et $\hat{CPA}$ sont égaux à $2\pi/3$.

Démo:

•) P.q P existe.

$$\text{On a } OA \leq OM + MA \Rightarrow MA \geq OM - OA.$$

De plus,

$$\begin{aligned} F(M) = AM + BM + CM &\geq 3OM - (OA + OB + OC) \\ &\geq 3OM - F(O) \end{aligned}$$

$$\text{R.q: } F(M) \xrightarrow{OM \rightarrow \infty} \infty. \text{ donc } F \text{ coercive.}$$

On va donc chercher son minimum sur un compact.

$$\text{Et } F(M) > F(O) \text{ dès que } OM > \left(\frac{1}{3}\right) F(O) \leftarrow \text{sinon } F(M) \geq 3 \cdot \frac{1}{3} F(O) - F(O) = F(O).$$

Donc, sur le compact $\{M \mid OM \leq (2/3) F(O)\} = B(O, \frac{2}{3} F(O))$ la fonction continue F atteint son minimum en au moins un point P , qui donne aussi le minimum de F sur $\mathbb{R}^2$. (Car sinon $F(M) > F(O)$ donc P n'est pas un minimum et existence car compact)

•) P.q $P \notin \{A, B, C\}$:

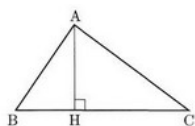


Fig. 172. $f(H) < f(B)$ et $f(H) < f(C)$.

On peut s.g. $\hat{B}$ et $\hat{C} < \pi/2$ et $\hat{A}$ l'angle le plus grand.

H := pied de la hauteur issue de A .

$$H \in [BC].$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } F(H) = HA + HB + HC &= HA + BC < BA + BC = F(B); \\ &< CA + BC = F(C). \end{aligned}$$

Donc, le min $\neq B$ et C .

IP n'est pas atteint en A car:

$\rightarrow$ si $\hat{A} < \pi/2$: m raisonnement

$\rightarrow$ sinon: $\pi/2 < \hat{A} < 2\pi/3$

→ si $\hat{A} \leq \pi/2$: m raisonnement

→ sinon : $\pi/2 < \hat{A} < 2\pi/3$

Soit M voisin de A sur la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A} = 2\alpha$.

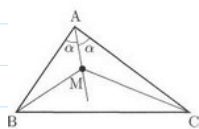


Fig. 173. $f(M) < f(A)$.

On a :

$$MB^2 = AB^2 - 2AB \cdot AM \cos \alpha + AM^2 \quad (\text{AP Kashi})$$

Avec le DL de M , on a :

$$\begin{aligned} MB &= AB \sqrt{1 - 2 \frac{AM}{AB} \cos \alpha + o(AM^2)} \\ &= AB \left(1 + \frac{1}{2} \left(-2 \frac{AM}{AB} \cos \alpha + o(AM^2) \right) \right) \\ &= AB - AM \cos(\alpha) + o(AM^2) \end{aligned}$$

De même avec MC .

On obtient

$$\begin{aligned} F(M) &= AM + BM + CM \\ &= AM + AB - AM \cos(\alpha) + o(AM^2) + AC - AM \cos(\alpha) \\ &= F(A) + \underbrace{(1 - 2 \cos \alpha)}_{< 0 \text{ car } 2\alpha \in]0; 2\pi/3[} AM + o(AM^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(M) < F(A)$$

OK

•) P.q. $P \in \text{Triangle } ABC$:

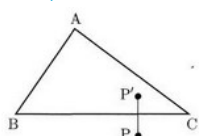


Fig. 174. $f(P') < f(P)$.

Si P et A sont de part et d'autre de (BC) , le sym P' de P p/r à (BC) .

On a :

$$P'A < PA, \quad P'B = PB \text{ et } P'C = PC \Rightarrow F(P') < F(P).$$

•) Calcul grad F .

Sur F est e^∞ sur $\{A, B, C\}^c$.

On note :

$$F(M) = F_A(M) + F_B(M) + F_C(M) \quad \text{et} \quad M := (x, y).$$

On a :

$$\text{grad } F(M) = \text{grad } F_A(M) + \text{grad } F_B(M) + \text{grad } F_C(M) \quad (\text{par lin.})$$

On a :

$$F_A(M) := \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2}$$

Donc,

$$\text{grad } F_A(M) = \left(\frac{F_A(x, y)}{\partial x}, \frac{F_A(x, y)}{\partial y} \right)$$

$$= \left(\frac{-2(x_A - x)}{2MA}, \frac{-2(y_A - y)}{2MA} \right)$$

$$= -\frac{1}{MA} (x_A - x, y_A - y) = -\frac{\vec{MA}}{MA}.$$

Donc, on a :

$$\text{grad } F(P) = - \left(\frac{\vec{PA}}{PA} + \frac{\vec{PB}}{PB} + \frac{\vec{PC}}{PC} \right) = \vec{0}$$

•) $M = 0$...

•) P.g les angles sont $2\pi/3$:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow 1 = \|\vec{w}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ = 1 + 2\underbrace{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}_{= -1/2} + 1 \\ \Rightarrow \beta = 2\pi/3 = \widehat{APB}$$

De même pour $\widehat{BPC}$ et $\widehat{CPA}$.

•) Unité:

P.g f est strictement convexe:

Soit $t \in]0, 1[$ et $M, N \in \mathbb{R}^2$.

$$f(tM + (1-t)N) = |a - t m - (1-t)n| + |b - t m - (1-t)n| + |c - t m - (1-t)n| \\ = |t(a-m) - (1-t)(n-a)| + |t(b-m) - (1-t)(n-b)| + \dots \\ \leq t(|a-m| + |b-m| + |c-m|) + (1-t)(|n-a| + |n-b| + |n-c|) \\ \leq t f(M) + (1-t) f(N) \text{ car norme.}$$

Et inégalité stricte car $N \neq M$ et A, B, C non alignés.

Donc, f strict. convexe.

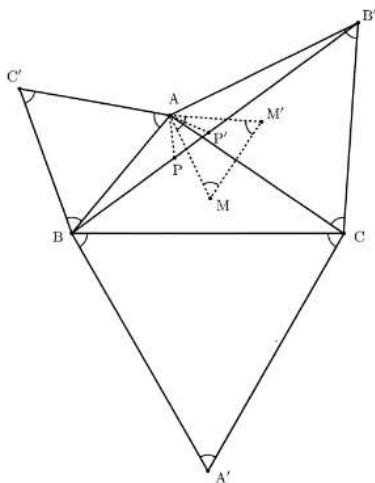
Donc, unité du point critique P .

Annexe:

• Construction du point:

Remarque 4. Construction géométrique de P .

On peut construire P géométriquement, comme le montre le schéma ci-dessous :



Mais je ne me suis pas intéressé à pourquoi c'est vrai exactement.

On peut de plus montrer que si un des angles du triangle est supérieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$, par exemple $\hat{A}$, alors $P = A$.

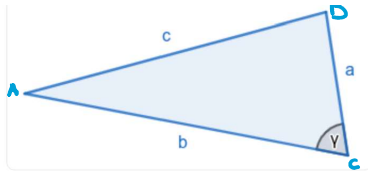
• AP Kashi:

Théorème d'Al-Kashi. Pour tout triangle :

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) = c^2$$

où a, b, c sont les longueurs des trois côtés, et γ est l'angle opposé au côté c .





Démo:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= \|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{AC} + \vec{CB})(\vec{AC} + \vec{CB}) \\
 &= \underbrace{\vec{AC} \cdot \vec{AC}}_{=b^2} + \underbrace{\vec{AC} \cdot \vec{CB}}_{=-ab \cos(\gamma)} + \underbrace{\vec{CB} \cdot \vec{CB}}_{=a^2} + \underbrace{\vec{CB} \cdot \vec{AC}}_{=-ab \cos \gamma} \\
 &= b^2 + c^2 - 2ab \cos(\gamma)
 \end{aligned}$$

• $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\text{entre } u \text{ et } v)$

Démo:

Théorème 2 : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

→ démonstration :

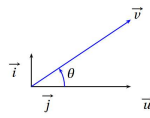
Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ la base orthonormale définie par : $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{j}$ tel que

$\|\vec{j}\| = 1$ et $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(\|\vec{u}\|; 0)$ et

$\vec{v}(\|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}); \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v}))$.

D'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ d'après le théorème 1.



Démo:

* 1. q P existe:

On a $OA \leq OP + PA \Rightarrow PA \geq OP - OA$.

De plus,
$$F(P) = AP + BP + CP \geq 3OP - (OA + OB + OC) \geq 3OP - F(O)$$

On r.q. $F(P) \xrightarrow[OP \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc F coercive.

F continue.

On va donc chercher le min de F sur un compact.

On r.q.: $F(P) > F(O)$ si $OP > \frac{2}{3} F(O)$.

Donc sur:

$\{P \mid OP \leq \frac{2}{3} F(O)\}$ compact.

Donc, $\exists P$ min de F .

* 1. q $P \notin \{A, B, C\}$:

• S.g. $\hat{B}$ et $\hat{C} < \pi/2$:
On a $F(H) = AH + BH + HC = AH + BC < BA + BC = F(B)$
 $< AC + BC = F(C)$.



• Pour A:

$\hookrightarrow$ si $\hat{A} < \pi/2 \leadsto$ OK

$\hookrightarrow$ si $\hat{A} \in [\pi/2; \pi/3]$: $\hat{A} = 2\alpha$.

On a: $MP^2 = AB^2 - 2AB \cdot AP \cos \alpha + AP^2$
 $\Rightarrow MP = AB \left(1 - \frac{2AP}{AB} \cos \alpha + \frac{AP^2}{AB^2} \right)^{1/2}$
 $\stackrel{dL}{\Rightarrow} MP = AB \left[1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{2AP}{AB} \cos \alpha \right) + o(AP^2) \right]$
 $= AB - AP \cos \alpha + o(AP^2)$



Donc $MP = AB - AP \cos \alpha + o(AP^2)$.

Donc $F(P) = AP + AB - AP \cos \alpha + AC - AP \cos \alpha + o(AP^2)$
 $= F(A) + AP(1 - 2 \cos \alpha) + o(AP^2)$
 < 0 car $2\alpha \in]0; 2\pi/3[$

Donc, $f(P) < f(A)$.

* 1. q $P \in ABC$:

Arg. géométrique.

* Calcul grad F :
 $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\{A, B, C\}^c$

On note: $F(P) = f_A(P) + f_B(P) + f_C(P)$ où $f_A(P) = \|\vec{PA}\| = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2}$

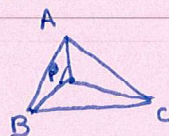
avec $P = (x, y)$.

On a:

$\text{grad } f_A(P) = \left(\frac{-2(x_A - x)}{2PA}, \frac{-2(y_A - y)}{2PA} \right) = -\frac{\vec{PA}}{PA}$

Donc, $\text{grad } F(P) = - \left(\underbrace{\frac{\vec{PA}}{PA}}_{:= \vec{u}} + \underbrace{\frac{\vec{PB}}{PB}}_{:= \vec{v}} + \underbrace{\frac{\vec{PC}}{PC}}_{:= \vec{w}} \right) = \vec{0}$

* 1. q les angles sont $2\pi/3$:



On a $1 = \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
 $= 1 + 2 \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}_{= -1/2} + 1$
 $= -1/2 = \cos \beta$

De même pour $\hat{APC}$ et $\hat{BPC}$. $\Rightarrow \beta = 2\pi/3 = \hat{APB}$

* Unicité:

F est convexe par somme de norme et strict, car A, B et C non alignés ($\neq \Delta$).

Donc, $\exists ! P$ □